

INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES SUR LA CONVECTION NATURELLE DANS UN VOLUME POREUX CYLINDRIQUE

S. BORIES et A. DELTOUR

Institut de Mécanique des Fluides Associé au C.N.R.S.
 (Groupe d'Etude sur les Milieux Poreux),
 2, Rue Charles Camichel, 31071 Toulouse-Cedex, France

(reçu le 13 juillet 1979)

Résumé – La convection naturelle d'origine thermique qui se développe dans une cavité poreuse de section droite circulaire d'axe vertical limitée horizontalement par deux surfaces isothermes imperméables et latéralement par un matériau imperméable de conductivité thermique donnée, est étudiée par voie théorique. Les résultats présentés concernent principalement les critères de stabilité et le transfert de chaleur moyen. Ils sont explicités en fonction du rapport de forme (extension verticale sur diamètre de la cavité) et du rapport des conductivités thermiques milieu poreux-paroi.

NOMENCLATURE

g , accélération de la pesanteur;
 p' , perturbation de pression;
 \mathbf{n} , vecteur unitaire normal à la paroi;
 t , temps;
 z', r' , coordonnées;
 z, r , coordonnées adimensionnelles;
 C , nombre d'onde;
 D , diamètre de la cavité;
 H , hauteur de la cavité;
 K , perméabilité;
 P , pression;
 S , section droite de la cavité;
 T , température;
 \mathbf{V}' , vitesse de filtration (u', v', w');
 \mathbf{V} , vitesse de filtration adimensionnelle (u, v, w).

$$Ra^*(H) = g \frac{\alpha(\rho C)_f K}{\nu \lambda^*} \beta H^2;$$

$Ra^*(D)$, nombre de Rayleigh de filtration;
 $Ra^*(D)$, = $Ra^*(H) \cdot (D/H)^2$;
 R_0 , = H/D , rapport de forme;
 Λ , = λ^*/λ_p .

Indices, symboles

$*$, grandeur définie en milieu poreux;
 c , valeur critique;
 f , fluide;
 p , paroi;
 0 , état de référence;
 $\langle X \rangle$, valeur moyenne de X dans le plan horizontal;
 \bar{X} , valeur moyenne de X dans la direction verticale.

Lettres grecques

α , coefficient d'expansion thermique volumique du fluide;
 β , composante $-\partial T/\partial z$ du gradient de température;
 ε , porosité;
 θ' , perturbation de température;
 θ , perturbation de température adimensionnelle;
 λ , conductivité thermique;
 μ , viscosité dynamique;
 ν , viscosité cinématique;
 ρ , masse volumique;
 (ρC) , chaleur volumique à pression constante;
 φ , densité de flux de chaleur;
 ϕ , angle;
 ΔT , écart de température: $T_2 - T_1$.

Nombres sans dimension

Nu^* , nombre de Nusselt;
 $Ra^*(H)$, nombre de Rayleigh de filtration

1. INTRODUCTION

LES ETUDES qui ont été effectuées, au cours de la dernière décennie, sur les phénomènes de convection naturelle d'origine thermique en milieu poreux, ne concernent, pour la plupart d'entre elles, que des configurations géométriques dont l'extension dans la direction du gradient moyen de température est faible par rapport aux autres dimensions. Il en est ainsi des études réalisées sur des milieux poreux de forme parallélépipédique (couche de faible épaisseur relative) ou maintenus entre deux cylindres coaxiaux (espace annulaire faible par rapport à la longueur) [1, 2].

Parfois caractérisé dans la littérature sous le titre de convection naturelle en couche de grande extension, ce type de problème a fait l'objet de nombreux travaux portant notamment sur les critères de stabilité, la forme des écoulements convectifs, le transfert de chaleur moyen et l'influence des propriétés thermophysiques des phases fluide et solide sur l'ensemble des phénomènes [3, 4].

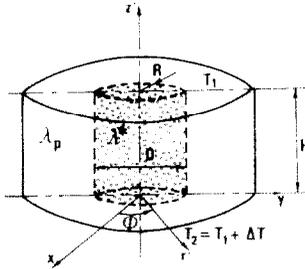


FIG. 1. Cavité poreuse.

D'une manière générale, les conditions de stabilité, et par voie de conséquence les écoulements et le transfert de chaleur induit, sont toutefois très largement dépendants des dimensions géométriques et des conditions aux limites thermiques imposées aux frontières du domaine dans lequel les mouvements convectifs peuvent se développer.

Bien qu'il existe quelques travaux récents sur l'étude des effets de confinement géométrique [5-8], aucune recherche, à l'exception de celle d'Ostroumov [9] dans le cas d'un volume fluide, n'a été réalisée, à notre connaissance, pour apprécier l'influence du transfert de chaleur conjugué entre le milieu poreux et l'enveloppe latérale sur les phénomènes convectifs.

Cette analyse conjointe des effets de confinement et des conditions aux limites thermiques est abordée ici, d'un point de vue théorique, pour un volume poreux cylindrique d'axe vertical limité par des surfaces horizontales isothermes et imperméables. Les résultats présentés concernent les critères de stabilité et le transfert de chaleur moyen.

2. FORMULATION THEORIQUE DU PROBLEME

Le modèle physique considéré est constitué par une cavité cylindrique de section droite circulaire d'axe vertical contenant un milieu poreux homogène et isotrope saturé par un fluide unique (Fig. 1). La cavité, réalisée dans un matériau solide de conductivité thermique λ_p a une hauteur H et un diamètre D . Sa paroi latérale est supposée d'extension horizontale infinie et les plans $z' = 0$ et H imperméables et isothermes maintenus en régime permanent aux températures T_2 et T_1 constantes avec $T_2 = T_1 + \Delta T$, $\Delta T > 0$.

Compte tenu des hypothèses couramment admises pour décrire les phénomènes de transfert de chaleur et de masse sans changement de phase en milieu poreux : équilibre thermique entre fluide et matrice solide, fluide satisfaisant à l'approximation de Boussinesq, le système d'équations qui est le plus largement utilisé pour étudier la convection dans de tels milieux s'explique comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{V}' = 0 \\ \rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \\ \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} = -\nabla P - \frac{\mu}{K} \mathbf{V}' + \rho g \\ (\rho C)^* \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C)_f \mathbf{V}' \cdot \nabla T = \lambda^* \nabla^2 T. \end{array} \right.$$

Outre le système précédent, la formulation théorique complète du problème considéré comprend :

— l'équation du transfert de chaleur dans la paroi :

$$(\rho C)_p \frac{\partial T_p}{\partial t} = \lambda_p \nabla^2 T_p$$

— les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T_2 = \text{cte à } z = 0; \quad T = T_1 = \text{cte à } z' = H; \\ \lambda^* \left(\frac{\partial T}{\partial r'} \right)_{r'=R} = \lambda_p \left(\frac{\partial T_p}{\partial r'} \right)_{r'=R}; \\ T = T_p \text{ à } r' = R; \quad T = T(z') \text{ à } r' \rightarrow \infty \\ \mathbf{V}' \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur les frontières de la cavité.} \end{array} \right.$$

3. ANALYSE DES CONDITIONS DE STABILITE

Elle sera effectuée dans le cadre des approximations de la théorie linéaire. L'état préconvectif étant caractérisé par la distribution de température :

$$T(z') = T_2 - \frac{\Delta T}{H} z'$$

aussi bien dans le milieu poreux que dans la paroi et un champ de vitesse $\mathbf{V}_0 = 0$ dans le fluide, nous appellerons $\mathbf{V}'(u', v', w')$, θ' , θ'_p et p' les perturbations de vitesse de température (milieu poreux et enveloppe) et de pression résultant de l'apparition des mouvements convectifs au sein de la cavité et de leur incidence sur la température de paroi. Ces perturbations étant supposées de faible amplitude, les hypothèses de linéarisation classiques [10] peuvent être adoptées et conduisent aux équations des perturbations :

dans le milieu poreux :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{V}' = 0; \\ \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} = -\nabla p' - \frac{\mu}{K} \mathbf{V}' + \rho g \alpha \theta' \\ (\rho C)^* \frac{\partial \theta'}{\partial t} = \lambda^* \nabla^2 \theta' + (\rho C)_f w' \beta \end{array} \right. \quad (1)$$

dans l'enveloppe :

$$(\rho C)_p \frac{\partial \theta'_p}{\partial t} = \lambda_p \nabla^2 \theta'_p \quad (2)$$

sur les frontières :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta' = \theta'_p = 0 \text{ pour } z' = 0, z' = H, r' \rightarrow \infty \\ \theta' = \theta'_p \text{ et } \lambda^* \frac{\partial \theta'}{\partial r'} = \lambda_p \frac{\partial \theta'_p}{\partial r'} \text{ pour } r' = R \\ \mathbf{V}' \cdot \mathbf{n} = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Les solutions de ces équations doivent satisfaire de surcroît aux conditions suivantes :

$$\int_S w' dS = 0$$

(conservation du débit dans une section droite) et V' et θ' finies lorsque $r' = 0$.

En éliminant p' et w' dans les équations relatives au milieu poreux, la recherche des solutions peut alors se limiter à la résolution du système en θ' et θ'_p :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mu}{K} \right) \left(\frac{(\rho C)^*}{(\rho C)_f} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\lambda^*}{(\rho C)_f} \nabla^2 \right) \nabla^2 \theta' \\ & = \beta g \alpha \rho \left(\nabla^2 \theta' - \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z'^2} \right) \quad (4) \\ & (\rho C)_p \frac{\partial \theta'_p}{\partial t} = \lambda_p \nabla^2 \theta'_p \end{aligned} \right.$$

les composantes de la vitesse et de la pression pouvant être déterminées ensuite à l'aide des équations (1).

Nous admettons que le principe d'échange de stabilité s'applique à la configuration étudiée et de ce fait limiterons notre analyse à la recherche du critère d'existence de solutions stationnaires: $\partial/\partial t = 0$. En introduisant les grandeurs adimensionnelles $z = z'/H$, $r = r'/H$, $\theta = \theta'/\Delta T$ et $\theta_p = \theta'_p/\Delta T$, le système (4) et les conditions aux limites associées s'écrivent alors:

$$\nabla^4 \theta = Ra^*(H) \nabla \theta \quad \text{avec} \quad \nabla_1^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \theta_p = 0 \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta = \theta_p = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0, \quad z = 1, \quad r \rightarrow \infty \\ \theta = \theta_p \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta_p}{\partial r} = \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad \text{pour} \quad r = \frac{R}{H} = \frac{1}{2R_0} \\ \text{avec} \quad R_0 = \frac{H}{D} \quad \text{et} \quad \Lambda = \lambda^*/\lambda_p \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Les fonctions θ et θ_p apparaissent ainsi comme dépendant des grandeurs adimensionnelles $Ra^*(H)$, R_0 et Λ . $Ra^*(H)$ représente le nombre de Rayleigh de filtration, R_0 rend compte du confinement géométrique et Λ du couplage thermique entre le milieu poreux et l'enveloppe.

Compte tenu des conditions aux limites en $z = 0$ et $z = 1$, conditions qui impliquent en outre: $\partial^2 \theta / \partial z^2 = \partial^2 \theta_p / \partial z^2 = 0$, sur ces mêmes frontières, nous rechercherons des solutions particulières de la forme: $B_k \sin(k\pi z) f(r, \phi)$, $f(r, \phi)$ étant par ailleurs supposée périodique dans le plan horizontal. Si C représente le nombre d'onde de la perturbation dans ce plan, la fonction f satisfait à l'équation $\nabla_1^2 f + C^2 f = 0$ et l'équation (5) s'écrit:

$$(k^2 \pi^2 + C^2)^2 \theta = Ra^*(H) C^2 \theta \quad k \text{ entier} \neq 0.$$

Cette équation permet d'expliciter la valeur du nombre de Rayleigh compatible avec l'existence d'une perturbation de la forme choisie:

$$Ra^*(H) = [(k\pi)^2 + C^2]^2 / C^2 \quad (8)$$

et la condition de stabilité marginale sera définie pour les valeurs de k et C conduisant à $Ra^*(H)$ minimal soit $Ra_c^*(H)$.

Pour déterminer les valeurs de C , il convient de

rechercher les fonctions $f_1(r, \phi)$ et $f_2(r, \phi)$ satisfaisant respectivement aux équations:

$$\nabla_1^2 f_1 + C^2 f_1 = 0 \quad \text{dans la cavité,}$$

$$\nabla_1^2 f_2 + \partial^2 f_2 / \partial z^2 = 0 \quad \text{dans l'enveloppe}$$

et aux conditions aux limites (7). Dans le référentiel choisi, ces équations s'explicitent comme suit:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \phi^2} + C^2 f_1 = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \phi^2} - k^2 \pi^2 f_2 = 0.$$

Leur résolution est aisée et conduit, compte tenu des conditions: θ fini lorsque $r = 0$ et $\theta_p = 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$ aux expressions suivantes de f_1 et f_2 :

$$f_1(r, \phi) = \sum_n A_n J_n(Cr) \cos(n\phi) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$f_2(r, \phi) = \sum_n D_n K_n(rk\pi) \cos(n\phi); \quad \text{soit pour } \theta \text{ et } \theta_p:$$

$$\theta = \sum_k \sum_n B_k A_n J_n(Cr) \cos(n\phi) \sin(k\pi z)$$

$$\theta_p = \sum_k \sum_n B_k D_n K_n(rk\pi) \cos(n\phi) \sin(k\pi z)$$

J_n et K_n fonctions de Bessel de première espèce et de première espèce modifiée. Les conditions aux limites en $r = 1/2R_0$ permettent dès lors de déterminer la relation entre C et $k\pi$.

$$\theta = \theta_p \rightarrow \sum_n A_n J_n(Cr) - \sum_k \sum_n D_n K_n(rk\pi) = 0$$

$$\Lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial \theta_p}{\partial r} \rightarrow \Lambda C \sum_n A_n J'_n(Cr)$$

$$- \sum_k \sum_n k\pi D_n K'_n(rk\pi) = 0$$

l'existence de solutions non nulles conduisant à la condition:

$$\begin{vmatrix} J_n(Cr) & -K_n(rk\pi) \\ \Lambda C J'_n(Cr) & -k\pi K'_n(rk\pi) \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Si l'on convient de ne considérer que le mode fondamental caractérisé par $k = 1$, le calcul de ce déterminant pour $r = 1/2R_0$ et Λ fixés, permet de

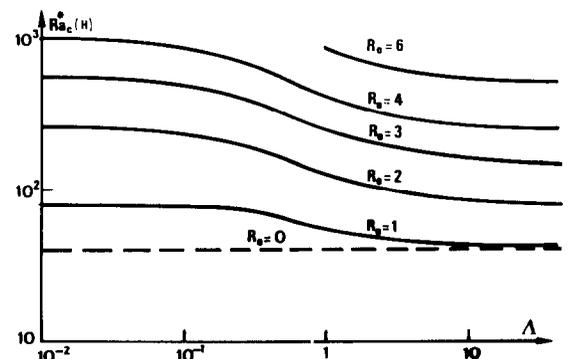


FIG. 2. Critères d'apparition de la convection $Ra_c^*(H) - \Lambda$ pour différentes valeurs de R_0 .

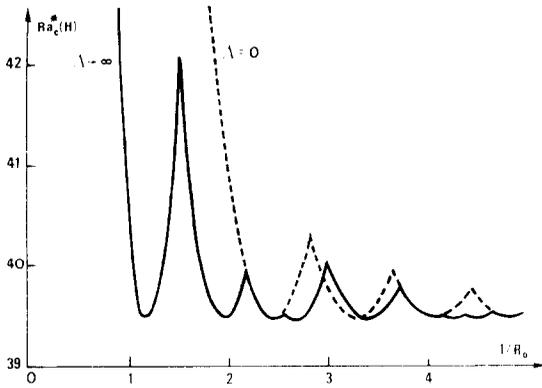


FIG. 3. Critères d'apparition de la convection $Ra_c^*(H) - R_0$ pour $\Lambda = 0$ (conductivité thermique de la paroi infinie) et $\Lambda \rightarrow \infty$ (paroi isolante).

rechercher la valeur extrême de Cr , c'est à dire de C pour laquelle la condition (9) est satisfaite. Cette valeur étant connue, le nombre de Rayleigh critique peut dès lors être aisément calculé à l'aide de l'expression (8). Les valeurs de $Ra_c^*(H)$ ainsi déterminées sont représentées en fonction de Λ et R_0 sur la Fig. 2.

Lorsque les valeurs de R_0 sont grandes, les résultats des calculs de la relation (9) permettent de constater que les valeurs minimales de $Ra_c^*(H)$ sont obtenues pour les fonctions de Bessel d'ordre 1, les fonctions de Bessel d'ordre zéro étant dans ce cas incompatibles avec la condition de conservation du débit $\int_S w \, dS = 0$ dans le plan r, ϕ . En se limitant à l'examen des cas extrêmes $\lambda_p \rightarrow \infty$ et $\lambda_p = 0$, les résultats sont, dans ces circonstances, représentés sur la Fig. 3. Ils sont en parfait accord avec ceux obtenus antérieurement [11] dans le cadre d'une analyse restreinte à l'examen de ces deux seules conditions.

D'une manière générale, l'effet de confinement géométrique (R_0 croissant) se traduit donc par un retard au déclenchement de la convection ($Ra_c^*(H)$ croissant, Figs. 2 et 3). Une influence analogue, bien que moins significative, peut être notée quand le rapport λ^*/λ_p décroît.

Lorsque R_0 tend vers 0, le critère de stabilité n'est plus influencé par les conditions aux limites et tend vers la valeur classique $Ra_c^*(H) = 4\pi^2$ relative à une couche poreuse d'extension horizontale infinie [1].

En ce qui concerne les structures d'écoulement, dont le champ de vitesse peut être aisément déterminé dès lors que les perturbations de température sont connues, elles sont de type pluricellulaire lorsque R_0 tend vers 0, unicellulaire asymétrique ($n = 1$) lorsque R_0 tend vers l'infini. Entre ces valeurs extrêmes, il n'existe qu'une configuration à symétrie axiale ($n = 0$) pour $R_0 \in [0,265, 0,295]$ lorsque $\lambda_p \rightarrow \infty$ et $R_0 \in [0,39, 0,459]$ pour $\lambda_p = 0$.

4. CONDITIONS DE STABILITÉ POUR LES FORTES VALEURS DE R_0 - HAUTEUR CRITIQUE

4.1. Conditions de stabilité pour $R_0 \rightarrow \infty$

Compte tenu du choix de l'échelle de longueur

adoptée pour définir le nombre de Rayleigh de filtration, il apparaît, lorsque l'on considère les résultats précédents, que $Ra_c^*(H)$ tend vers l'infini avec R_0 . Si l'on procède à une analyse des ordres de grandeur des différents termes de l'équation (5), relative au milieu poreux, en adoptant respectivement H et D pour définir les échelles de longueur des variations de la perturbation dans les directions Oz' et Or' , on constate toutefois que l'expression de :

$$\nabla^2 \theta' = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial \theta'}{\partial r'} \right) + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z'^2}$$

dans laquelle :

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial \theta'}{\partial r'} \right) \sim \frac{\Delta T}{D^2}; \quad \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \phi^2} \sim \frac{\Delta T}{D^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z'^2} \sim \frac{\Delta T}{H^2}$$

dégénère en :

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial \theta'}{\partial r'} \right) + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \phi^2}$$

lorsque $H \rightarrow \infty$. L'écoulement convectif ne dépendant plus que de r' et ϕ les perturbations de température s'explicitent dès lors en fonction de $Ra^*(D)$ et du rapport λ^*/λ_p ; $Ra^*(D)$ étant le nombre de Rayleigh défini en adoptant le diamètre de la cavité comme longueur de référence. Dans ces conditions, la recherche des critères de stabilité (Annexe) conduit aux valeurs suivantes: $Ra_c^*(D)_{\lambda_p=0} = 13,57$ et $Ra_c^*(D)_{\lambda_p \rightarrow \infty} = 58,73$ pour les deux types de conditions thermiques extrêmes.

4.2. Concept de hauteur critique

Afin de préciser les lois d'évolution de $Ra_c^*(D)$ pour $\Lambda = 0$ ou $\Lambda \rightarrow \infty$, lorsque le rapport R_0 croît, examinons les variations de ce paramètre en l'explicitant en fonction de $Ra_c^*(H)$ compte tenu de la relation de définition: $Ra_c^*(D) = Ra_c^*(H)/R_0^2$.

Etant donné que $Ra_c^*(H) = (\pi^2 + C^2)/C^2$ avec $C = b_i/r = 2R_0 b_i$ où b_i représente les zéros de rang 1 de la dérivée $J_1'(Cr)$ lorsque $\lambda_p = 0$ et de la fonction $J_1(Cr) = 0$ lorsque $\lambda_p \rightarrow \infty$ (Annexe) ($b_1 = 1,841$ pour $J_1'(Cr) = 0$ et $b_1 = 3,8317$ pour $J_1(Cr) = 0$), l'expression de $Ra_c^*(D)$ s'écrit :

$$Ra_c^*(D) = (2b_i)^2 \left[1 + \frac{2\pi^2}{(2R_0 b_i)^2} + \left(\frac{\pi}{2R_0 b_i} \right)^4 \right].$$

Le calcul de cette expression conduit aux résultats représentés sur la Fig. 4. On notera que pour $R_0 \rightarrow \infty$ les valeurs asymptotiques de $Ra_c^*(D)$ ainsi calculées sont bien en accord avec les valeurs résultant de l'étude directe, soit: $Ra_c^*(D)_{\lambda_p=0} = 13,57$ et $Ra_c^*(D)_{\lambda_p \rightarrow \infty} = 58,73$.

La convergence extrêmement rapide de $Ra_c^*(D)$ en fonction de R_0 permet en outre d'introduire ce que nous sommes convenus d'appeler le concept de hauteur critique, défini par la hauteur de la cavité pour laquelle les valeurs de $Ra_c^*(D)_{\lambda_p}$ ne s'écartent que de 5% maximum des valeurs asymptotiques. Dans les deux cas examinés: $H_c(\lambda_p = 0) \simeq 8,5 D$ et $H_c(\lambda \rightarrow \infty) \simeq 5 D$.

Lorsque la hauteur de la cavité est supérieure à la

hauteur critique, les conditions de stabilité sont donc caractérisées par des valeurs sensiblement constantes du nombre de Rayleigh $Ra_c^*(D)$, celui-ci ne dépendant que du rapport Λ des conductivités thermiques.

5. EXPRESSION DU TRANSFERT DE CHALEUR: $Nu^*[Ra^*(H)]$

La technique des puissances intégrales de Malkus déjà utilisée dans le cas de la convection naturelle en couches poreuses de grande extension ($R_0 < 1$) [1] peut également être mise en oeuvre en vue de rechercher une expression analytique du transfert de chaleur moyen induit par les mouvements convectifs au sein de la cavité.

Etant donné qu'en raison du caractère périodique des perturbations θ et θ_p dans le plan r', ϕ [13]:

$$\left\langle \frac{dT}{dz'} \right\rangle = -\frac{d\bar{T}}{dz'} - \frac{(\rho C)_f}{\lambda^* H} \int_0^H \langle w' \cdot \theta' \rangle dz'$$

$$\text{et } \left\langle \frac{dT_p}{dz'} \right\rangle = \frac{d\bar{T}_p}{dz'}$$

le nombre de Nusselt peut donc s'écrire:

$$Nu^* = \frac{\phi H}{\lambda^* \Delta T} = 1 + \frac{\int_0^H \langle w' \cdot \theta' \rangle dz'}{\frac{\lambda^*}{(\rho C)_f} \Delta T}$$

Le calcul de l'intégrale

$$\int_0^H \langle \theta' \cdot w' \rangle dz'$$

pouvant être effectué suivant la méthode désormais classique de Malkus [12] (prise de moyenne, sur le volume de la cavité, de l'équation de l'énergie pondérée par la perturbation de température), le nombre de Nusselt s'exprime alors par la relation suivante:

$$Nu^* = 1 + \sum_k N_k \left(1 - \frac{Ra_c^*(H)_k}{Ra^*(H)} \right)$$

$$\text{où } N_k = \left[\frac{\int_0^1 \langle (\theta \cdot w)^2 \rangle dz}{\left(\int_0^1 \langle \theta \cdot w \rangle dz \right)^2} - 1 \right]^{-1}$$

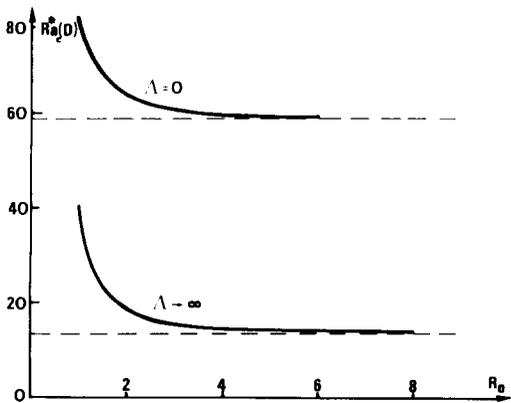


FIG. 4. Relations $Ra_c^*(D) - R_0$; pour $\Lambda = 0$ et $\Lambda \rightarrow \infty$.

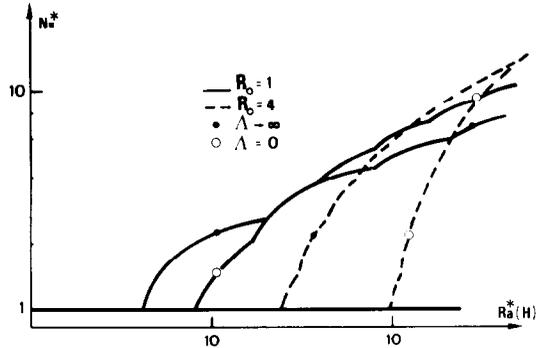


FIG. 5. Relations $Nu^* - Ra^*(H)$; pour $R_0 = 1$ et $4, \Lambda = 0$ et $\Lambda \rightarrow \infty$.

Les valeurs critiques du nombre de Rayleigh correspondant aux modes successifs de perturbations $Ra_c^*(H)_k$ étant calculées en fonction de Λ, C et k par la relation:

$$Ra_c^*(H)_k = \frac{[(k\pi)^2 + C^2]^2}{C^2}$$

les termes N_k peuvent être déterminés en utilisant les expressions de:

$$\theta = \sum_k A_k J_1(Cr) \cos \phi \sin(k\pi z)$$

$$\text{et de } w = \sum_k B_k J_1(Cr) \cos \phi \sin(k\pi z)$$

déduite de (1).

Les valeurs de N_k ainsi calculées sont les mêmes que pour la couche poreuse d'extension horizontale infinie, soit:

$$N_k = \begin{cases} 2 & \text{lorsque } Ra^*(H) > Ra_c^*(H)_k \\ 0 & \text{lorsque } Ra^*(H) < Ra_c^*(H)_k. \end{cases}$$

Ce résultat n'est pas surprenant puisque'en milieu poreux, les contraintes visqueuses sont supposées nulles sur les surfaces frontières et de ce fait n'introduisent pas de conditions supplémentaires par rapport au cas de la couche poreuse de grande extension horizontale.

Les corrélations $Nu^*[Ra^*(H)]$ sont représentées sur les Figs. 5 et 6 pour $\Lambda = 0, \Lambda \rightarrow \infty$ et $R_0 \in (1; 6)$. Lorsque $R_0 < 1$ la relation théorique est analogue à

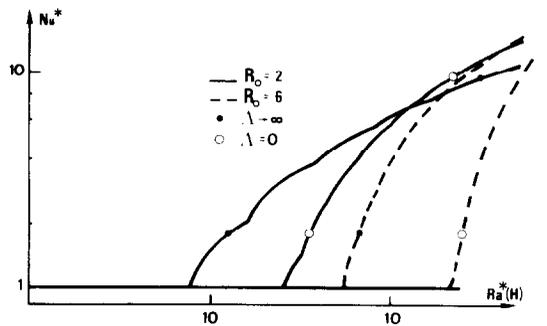


FIG. 6. Relations $Nu^* - Ra^*(H)$; pour $R_0 = 2$ et $6, \Lambda = 0$ et $\Lambda \rightarrow \infty$.

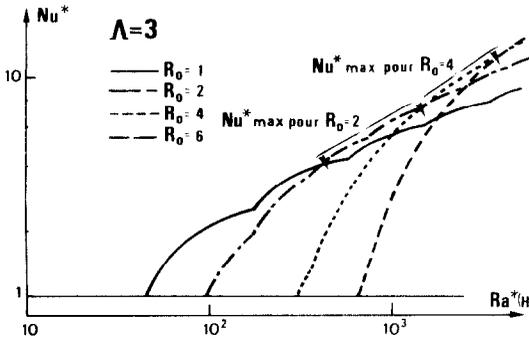


FIG. 7. Relations $Nu^* - Ra^*(H)$; pour $\Lambda = 3, R_0 = 1, 2, 4, 6$.

celle obtenue dans le cas d'une couche poreuse de grande extension horizontale [1]. Les recouvrements que l'on observe pour certains couples de valeurs Nu^* , Ra^* en fonction de R_0 semblent indiquer par ailleurs le comportement plus largement dissipatif de certaines configurations (Fig. 7).

6. CONCLUSION

Les résultats présentés, constituent la première étape d'une étude concernant l'influence des effets de confinement et des conditions aux limites thermiques sur certains aspects de la convection naturelle en milieu poreux. Au terme de cette analyse théorique, dont il conviendra d'apprécier le caractère représentatif en ayant recours à des vérifications expérimentales, diverses informations ont été apportées concernant :

- (i) le rôle stabilisateur des effets de confinement géométrique et des conditions de couplage thermique sur les frontières latérales.
- (ii) les conditions de stabilité dans une cavité de grande extension verticale $H \gg D$.
- (iii) l'expression du nombre de Nusselt en fonction des différents paramètres caractéristiques du phénomène: $Ra^*(H)$, Λ et R_0 .

REFERENCES

1. M. Combarous et S. Bories, Hydrothermal convection in saturated porous media, in *Advances in Hydrosience*, vol. 10, pp. 231-307. Academic Press, New York (1975).
2. J. P. Caltagirone, Instabilités thermoconvectives en milieu poreux, Thèse—Université de Paris (1976).
3. M. Combarous et S. Bories, Modélisation de la convection naturelle au sein d'une couche poreuse horizontale à l'aide d'un coefficient de transfert solide fluide. *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, 505-515 (1974).
4. M. Combarous, Convection naturelle en milieu poreux et systèmes géothermiques, *Sixième Conférence Internationale sur le Transfert de Chaleur*, Toronto, Vol. 7, 1ère Partie, pp. 35-49. (1978).
5. J. L. Beck, Convection in a box of porous material saturated with fluid, *Physics Fluids* **15**(8), 1377-1383 (1972).
6. P. H. Holst et K. Aziz, A theoretical and experimental study of natural convection in a confined porous medium, *Can. J. Chem. Engng* **50**, 232-241 (1972).
7. H. L. Lawson et W. J. Yang, Wall effect on Benard convection in porous media, in *Proceeding of 13th Midwestern Mechanics Conference*, pp. 179-187, Pittsburgh (1973).
8. A. Zebib, Onset of natural convection in a cylinder of

water saturated porous media, *Physics Fluids* **21**(4), 699-700 (1978).

9. G. A. Ostroumov, Free convection conditions of the internal problem, NACA Tech. Nemo. No. 1407 (1958).
10. S. Chandresekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon Press, Oxford (1961).
11. A. Deltour, S. Bories et M. Combarous, Influence du rapport de forme et des conditions aux limites latérales sur l'apparition de la convection dans un volume poreux cylindrique vertical, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris* **284 B**, 135-138 (1977).
12. W. V. R. Malkus et G. Veronis, Finite amplitude cellular convection, *J. Fluid Mech.* **4**, 225-260 (1958).
13. S. Bories et A. Deltour, Convection naturelle en couche poreuse cylindrique, Note G.Et. 40, Institut de Mécanique des Fluides, Toulouse (1979).

ANNEXE

Critère de stabilité pour $R_0 \rightarrow \infty$

Nous admettons que lorsque l'extension verticale de la cavité tend vers l'infini, la forme générale de l'écoulement correspondant aux valeurs de R_0 fini > 1 se conserve. Compte tenu des remarques effectuées au paragraphe 4, et des conditions imposées par l'équation de continuité, il en résulte : que les perturbations sont indépendantes de z' ; que la vitesse de l'écoulement convectif parallèle à Oz' est caractérisée par $u' = 0, v' = 0$, et par voie de conséquence que

$$\frac{\partial p'}{\partial r'} = \frac{\partial p'}{\partial \phi} = \frac{\partial p'}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad w' = \frac{Kg\alpha\theta'}{\mu}$$

Soient

$$w' = \sum_n A_n w'(r') \cos(n\phi),$$

$$\theta' = \sum_n A_n \theta'(r') \cos(n\phi)$$

et

$$\theta'_p = \sum_n D_n \theta'_p(r') \cos(n, \phi)$$

les solutions générales des perturbations de vitesse et de température. Les équations de l'énergie écrites respectivement dans la cavité et dans la paroi, compte tenu de l'expression de w' deviennent :

$$\frac{d^2\theta'}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{d\theta'}{dr'} - \frac{n^2\theta'}{r'^2} + \frac{K\rho g\alpha}{\mu\lambda^*} \beta(\rho C)_r \theta' = 0$$

$$\frac{d^2\theta'_p}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{d\theta'_p}{dr'} - \frac{n^2\theta'_p}{r'^2} = 0$$

soit sous forme adimensionnelle en introduisant D comme longueur de référence :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} + \left(Ra^*(D) - \frac{n^2}{r^2} \right) \theta = 0, \quad r = \frac{r'}{D}$$

$$\frac{d^2\theta_p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_p}{dr} - \frac{n^2\theta_p}{r^2} = 0.$$

Les solutions de ces équations sont bien connues et s'expriment respectivement par :

$$\theta = \sum_n \left[A_n J_n[r(Ra^*(D))]^{1/2} + B_n Y_n[r(Ra^*(D))]^{1/2} \right] \cos(n\phi)$$

$$\theta_p = \sum_n D_n \left[\frac{\alpha_n}{r^n} + \beta_n r^n \right] \cos(n\phi), \quad A_n, B_n, D_n, \alpha_n \text{ et } \beta_n \text{ constantes}$$

Y_n fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre n .

Compte tenu des conditions aux limites :

$$\theta \text{ fini pour } r \rightarrow 0 \quad B_n = 0$$

d'où $\theta = \sum_n A_n J_n (r [Ra^*(D)]^{1/2}) \cos(n\phi)$

$\theta_p = 0$ pour $r \rightarrow \infty$ $\beta_n = 0$

d'où $\theta_p = \sum_n D_n \left(\frac{\alpha_n}{r^n}\right) \cos(n\phi)$.

En exprimant les conditions de raccordement sur l'interface milieu poreux-enveloppe :

$\theta = \theta_p$ pour $r = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_n A_n J_n \left[\frac{(Ra^*(D))^{1/2}}{2}\right] = \sum_n D_n \alpha_n (2)^n$

d'où $D_n \alpha_n = A_n J_n \left[\frac{(Ra^*(D))^{1/2}}{2}\right] \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

En remplaçant $D_n \alpha_n$ dans l'expression de θ_p et en écrivant la continuité de la densité de flux soit :

$\lambda^* \frac{\partial \theta}{\partial r} = \lambda_p \frac{\partial \theta_p}{\partial r}$ pour $r = \frac{1}{2}$,

il vient :

$$\sum_n \lambda^* A_n (Ra^*(D))^{1/2} J_n \left[\frac{(Ra^*(D))^{1/2}}{2}\right] = - \sum_n 2\lambda_p^n A_n J_n \left[\frac{(Ra^*(D))^{1/2}}{2}\right].$$

Pour le terme fondamental correspondant à l'écoulement de base $n = 1$, il vient :

$\Lambda = - \frac{J_1(X)}{X J_1'(X)}$ avec $X = \frac{(Ra^*(D))^{1/2}}{2}$.

Lorsque Λ est connu, la tabulation de l'expression ci-dessus, permet de calculer la valeur extrême minimale de X , c'est à dire de $Ra_c^*(D)$ compatible avec l'égalité. Pour $\Lambda = 0$ ou $l' \infty$ on est conduit à $J_1(X) = 0$ et $J_1'(X) = 0$, valeurs pour lesquelles : $Ra_c^*(D)_{\lambda_p \dots} = 13,57$, $Ra_c^*(D)_{\lambda_p \dots} = 58,73$ (Fig. 4).

INFLUENCE OF THE BOUNDARY CONDITIONS ON THE FREE CONVECTION IN A CYLINDRICAL POROUS MEDIUM

Abstract – Natural convection in a vertical porous cavity with a circular cross section bounded horizontally by two impervious isothermal surfaces and laterally by a solid material of given conductivity has been theoretically studied. A criterion is given for the onset of the convection and an analytical expression is derived for the mean heat transfer.

They are explicitly presented as a function of the shape ratio of the cylinder as well as the conductivity ratio between the porous media and the solid material bounding the cavity.

An English translation of this paper is available by writing to the authors.

DER EINFLUSS DER RANDBEDINGUNGEN AUF DIE FREIE KONVEKTION IN EINEM ZYLINDRISCHEN PORÖSEN MEDIUM

Zusammenfassung—Die freie Konvektion in einem vertikalen porösen Hohlraum mit kreisförmigem Querschnitt, der horizontal durch zwei undurchlässige isotherme Flächen und seitlich von festem Material gegebener Leitfähigkeit begrenzt wird, wurde theoretisch untersucht. Die erzielten Ergebnisse betreffen Kriterien für das Einsetzen der Konvektion und den mittleren Wärmeübergang. Sie werden explizit als Funktionen des Formverhältnisses des Zylinders als auch des Verhältnisses der Leitfähigkeiten zwischen dem porösen Medium und dem festen Material, das den Hohlraum begrenzt, angegeben.

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА СВОБОДНУЮ КОНВЕКЦИЮ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Аннотация — Теоретически исследовалась естественная конвекция в вертикальной полости круглого сечения, заполненной пористым материалом и ограниченной снизу и сверху двумя непроницаемыми изотермическими поверхностями, а с боков — твердым материалом с заданной теплопроводностью. Определен критерий возникновения конвекции и получены данные о среднем значении величины теплового потока.

Результаты представлены в виде функциональной зависимости от отношения диаметра цилиндра к его длине, а также отношения теплопроводностей пористой среды и твердого материала, ограничивающего полость.